Задача о преобразовании координат.

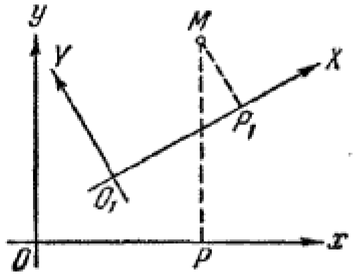
1. Постановка задачи.

• Положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно некоторой системы координат. Координаты точки изменятся, если мы выберем другую систему координат.

• Задача преобразования координат состоит в том, *чтобы, зная координаты точки в одной системе координат, найти ее координаты в другой системе*.

Эта задача будет разрешена, если мы установим формулы, связывающие координаты произвольной точки по двум системам, причем в коэффициенты этих формул войдут постоянные величины, определяющие взаимное положение систем.

• Пусть даны две декартовы системы координат xOy и XO_1Y.

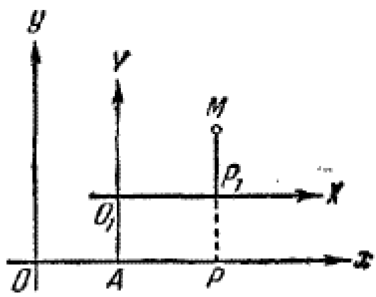


• Положение новой системы XO_1Y относительно старой системы xOy будет определено, если известны координаты $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нового начала O_1 по старой системе и угол $\boldsymbol{\alpha}$ между осями Ox и O_1X. Обозначим через x и y координаты произвольной точки М относительно старой системы, через X и Y—координаты той же точки относительно новой системы. Наша задача заключается в том, чтобы старые координаты x и y выразить через новые X и Y. В полученные формулы преобразования должны, очевидно, входить постоянные $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{\alpha}$.

Решение этой общей задачи мы получим из рассмотрения двух частных случаев.
1. Меняется начало координат, направления же осей остаются неизменными ($\boldsymbol{\alpha} = 0$).
2. Меняются направления осей, начало же координат остается неизменным ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = 0$).

2. Перенос начала координат.

• Пусть даны две системы декартовых координат с разными началами O и O_1 и одинаковыми направлениями осей.



• Обозначим через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ координаты нового начала O_1 в старой системе и через x, y и X, Y—координаты произвольной точки М соответственно в старой и новой системах. Проектируя точку М на оси O_1X и Ox, а также точку O_1 на ось Ox, получим на оси Ox три точки O, A и P. Величины отрезков OA, AP и OP связаны следующим соотношением:

$$|OA| + |AP| = |OP|. \qquad (1)$$

Заметив, что $|OA| = \boldsymbol{a}$, $|OP| = \boldsymbol{x}$, $|AP| = |O_1P_1| = X$, перепишем равенство (1) в виде:

$$\boldsymbol{a} + X = \boldsymbol{x}. \qquad (2)$$

Аналогично, проектируя М и O_1 на ось ординат, получим:

$$\boldsymbol{y} = Y + \boldsymbol{b} \qquad (3)$$

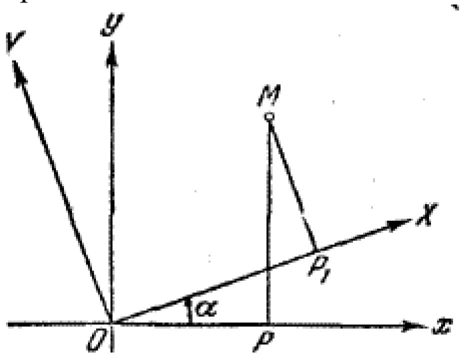
Из формул (2) и (3) новые координаты можно выразить через старые:

$$X = x - a, \qquad (2')$$

$$Y = y - b. \qquad (3')$$

3. Поворот осей координат.

• Пусть даны две декартовы системы координат с одинаковым началом O и разными направлениями осей.



• Пусть α есть угол между осями Ox и OX. Обозначим через x, y и X, Y координаты произвольной точки М соответственно в старой и новой системах:

$$x = |OP|,\ y = |PM|,$$

$$X = |OP_1|,\ Y = |P_1M|.$$

Рассмотрим ломаную линию OP_1MP и возьмем ее проекцию на ось Ox. Замечая, что проекция ломаной линии равна проекции замыкающего отрезка, имеем:

$$OP_1MP = |OP|. \qquad (4)$$

С другой стороны, проекция ломаной линии равна сумме проекций ее звеньев; следовательно, равенство (4) запишется так:

$$\text{пр } OP_1 + \text{пр } P_1M + \text{пр } MP = |OP| \qquad (4')$$

Так как проекция направленного отрезка равна его величине, умноженной на косинус угла между осью проекций и осью, на которой лежит отрезок, то

$$\text{пр } OP_1 = X \cos \alpha$$

$$\text{пр } P_1M = Y \cos (90° + \alpha) = -Y \sin\alpha,$$

$$\text{пр } MP = 0.$$

Отсюда равенство (4') нам дает:

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha. \qquad (5)$$

• Аналогично, проектируя ту же ломаную на ось Oy, получим выражение для y. В самом деле, имеем:

$$\text{пр } OP_1 + \text{пр } P_1M + \text{пр } MP = \text{пр } OP = 0.$$

Заметив, что

$$\text{пр } OP_1 = X \cos (\alpha - 90°) = X \sin \alpha,$$

$$\text{пр } P_1M = Y \cos \alpha,$$

$$\text{пр } MP = -y,$$

будем иметь:

$$X \sin \alpha + Y \cos \alpha - y = 0,$$

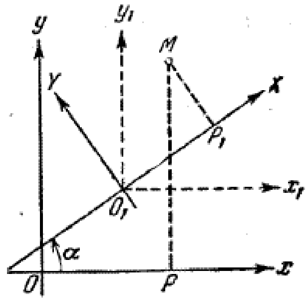
или

$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) мы получим новые координаты X и Y выраженными через старые x и y, если разрешим уравнения (5) и (6) относительно X и Y.

4. Общий случай.

• Пусть даны две декартовы системы координат с разными началами и разными направлениями осей.



• Обозначим через a и b координаты нового начала O, по старой системе, через α —угол поворота координатных осей и, наконец, через x, y и X, Y — координаты произвольной точки M соответственно по старой и новой системам.

•Чтобы выразить x и y через X и Y, введем вспомогательную систему координат $x_1O_1y_1$, начало которой поместим в новом начале O_1, а направления осей возьмем совпадающими с направлениями старых осей. Пусть x_1 и y_1, обозначают координаты точки M относительно этой вспомогательной системы. Переходя от старой системы координат к вспомогательной, имеем: $x = x_1 + a$, $y = y_1 + b$.

•Переходя, далее, от вспомогательной системы координат к новой, найдем:

$$x_1 = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y_1 = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Заменяя x_1 и y_1 в предыдущих формулах их выражениями из последних формул, найдем окончательно:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha + a$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha + b \quad (*)$$

Формулы (*) содержат как частный случай формулы (2) и (3). Так, при $\alpha = 0$ формулы (*) обращаются в

$$x = X + a, \quad y = Y + b,$$

а при $a = b = 0$ имеем:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + \cos\alpha.$$

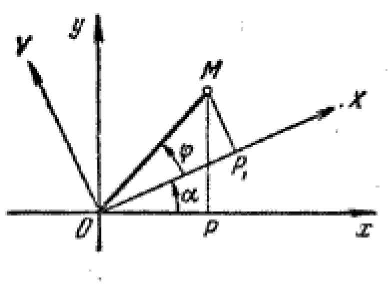
Из формул (*) мы получим новые координаты X и Y выраженными через старые x и y, если уравнения (*) разрешим относительно X и Y.

•Отметим важное свойство формул (*): они линейны относительно X и Y, т. е. вида:

$$x = AX + BY + C, \quad y = A_1X + B_1Y + C_1.$$

Легко проверить, что новые координаты X и Y выразятся через старые x и y тоже формулами первой степени относительно x и y.

•**Замечание.** Формулы (5) и (6) могут быть получены иначе.



Из рис. имеем:

$$x = OP = OM\cos(\alpha + \varphi) = OM\cos\alpha\cos\varphi - OM\sin\alpha\sin\varphi,$$
$$y = PM = OM\sin(\alpha + \varphi) = OM\sin\alpha\cos\varphi + OM\cos\alpha\sin\varphi.$$

Так как OM $\cos\varphi = X$, OM $\sin\varphi = Y$, то

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad (5)$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \quad (6)$$

Задача:

- Постройте множество точек плоскости, задаваемое в системе координат уравнением: $x^2 - y^2 = 1$ (**).
- Поверните (**) на 45° против часовой стрелки вокруг начала координат.
- В какое множество точек (***) перейдёт (**)?
- Задайте (***) аналитически.
- Постройте (***).
- Можно ли проделать подобные действия с множеством точек, задаваемым уравнением: $y^2 = 2x$? (Угол поворота подберите сами).
- Попробуйте обобщить полученные результаты.